E_6型Weyl GroupのSpringer表現(有限群論とその周辺)

村上, 徹

数理解析研究所講究録
424巻 1981年 129-136

E_6型 Weyl group の Springer 表現

千葉大 理学部　　村上敏

§1 序論

線型代数群の表現論において，Springer表現が重要な意味を持っている．ここでは，Springer表現のLusztig流のapproachである[Lusztig-Spaltenstein；3.5]（[Hotta-Springer；1.4]の一般化）を紹介する．それを使うと，初等的考察により，E型のSpringer表現がある程度決定できる．（著者修士論文）

§2. Induced unipotent classes

q は p 巾とし，p, q 十分大とする．

G con. reductive alg. gr. defined over $\mathbb{F}_q$

$\cup$

B Borel subgroup

$\cup$

T max. torus

W Weyl group of T in G

P parabolic subgr., s.t. $P \supset B$
$P = LU_P$ Levi decomposition
U_P unipotent radical of P
L Levi subgr. defined over $\mathbb{F}_q$, s.t. $L \supset T$
W' Weyl group of T in L

を以下固定する。ここで,

C' unipotent class of L

とすると,

$\exists !\ C$ unipotent class of G
s.t. $C \cap C'U_P$ is dense in $C'U_P$

がわかる。このとき, C is induced by C' という。
$v \in C$, $u \in C'$ のとき, v is induced by u ともいう。

<u>Rem</u>. C は P のとり方によらないことが知られている。

<u>Prop</u> (2.1)

v is induced by u のとき $\beta^L(u) = \beta^G(v)$.
但し, $\mathcal{B}_v^G = \{gB \mid g \in G,\ v \in gBg^{-1}\}$
$\beta^G(v) = \dim \mathcal{B}_v^G$

等とする。

ここで, $\iota : \mathcal{B}_v^G \to \mathcal{B} = G/B$ inclusion

とすると,

<u>Theorem</u> (2.3) [H.-S.; 1.1]

$$\iota^* : H^*(G/B, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^*(\mathcal{B}^G_v, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

は Springer modules として W-equivariant.

そして,

$$\mathrm{Im}(\iota^*) \subset H^*(\mathcal{B}^G_v)^{C(v)}$$

但し, $C(v) = Z_G(v)/Z_G(v)^\circ$

ι^{2e} non zero 但し, $e = \beta^G(v)$.

即ち,

$$\iota^{2e} : H^{2e}(G/B) \to H^{2e}(\mathcal{B}^G_v)^{C(v)}$$

は surjective W-equivariant.

ここで,

$V = \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^*, T) \otimes \mathbb{Q}$

$\mathcal{P}(V) =$ Symmetric alg. of $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q})$

$I = \langle$ W-invariant polynomial in $\mathcal{P}(V)$ vanishing at 0 $\rangle$

とすると,

<u>Prop</u> (2.4)

$\mathcal{P}(V)/I \simeq H^*(G/B) \otimes \varepsilon_W$ as W-modules.

次に, W と W′ の関係をみる.

$V = V' \oplus V^{W'}$ W′-stable decomposition

$V^{W'} = \{$ W′-invariant vector in V $\}$

$\pi : V \to V'$ canonical projection

$\pi^* : \mathcal{P}(V') \to \mathcal{P}(V)$ injection

とする。$E_1 \in \widehat{W}'$ に対して,

<u>Def</u> (2.5) E_1 has $(\widehat{B})$ on $\mathcal{P}(V')$

$$\iff \langle E_1, \mathcal{P}_i(V') \rangle = \begin{cases} 1 & (i = a_{E_1}) \\ 0 & (i < a_{E_1}) \end{cases} .$$

$\pi^*(E_1)$ で生成された $\mathcal{P}_{a_{E_1}}(V)$ の W-submodule を $E = j_{W'}^{W}(E_1)$ とする. E に対しても, (2.5) と同様の定義をする.

<u>Prop</u> (2.6) E_1 has $(\widehat{B})$ on $\mathcal{P}(V')$ とする.

(i) $a_{E_1} = a_E$

(ii) E has $(\widehat{B})$ on $\mathcal{P}(V)$, 特に E は irr.

次に,

$$I' = \langle W'\text{- invariant polynomial in } \mathcal{P}(V) \text{ vanishing at } 0 \rangle$$

とすると,

$$\mathcal{P}(V') \to \mathcal{P}(V)/I'$$

は surjective W'-equivariant であって

<u>Prop</u> (2.7)

$$\mathcal{P}(V)/I' \simeq H^*(L/L\cap B) \otimes \varepsilon_{W'}$$

は Springer modules として W'-equivariant.

さて, v is induced by u とする. (以下そうする.)
(2.1), (2.4), (2.7) を見て,
W-modules $H^{2e}(\mathcal{B}_v^G)^{C(v)}$ の ε_W を ρ_v^G
W′-modules $H^{2e}(\mathcal{B}_u^L)^{C(u)}$ の $\varepsilon_{W'}$ を ρ_u^L
とする. 但し, $C(u) = Z_L(u)/Z_L(u)^\circ$ とする.

<u>Def</u> (2.8)
ρ_v^G has $(\hat{B})$ on $H^*(G/B)$ の ε_W
$\Longleftrightarrow \langle \rho_v^G, H^{2i}(G/B)$ の $\varepsilon_W \rangle = \begin{cases} 1 & (i = \beta^G(v)) \\ 0 & (i < \beta^G(v)). \end{cases}$

同様の定義を ρ_u^L のときもする

<u>Rem</u> ρ_v^G has $(\hat{B})$ on $H^*(G/B)$ の ε_W 「ならば」, ρ_v^G has $(\hat{B})$ on $\mathcal{S}(V)$ である.

さて,
ρ_u^L has $(\hat{B})$ on $H^*(L/L\cap B)$ の $\varepsilon_{W'}$ とすると
$\exists!\ E_1$ W′-submodule of $\mathcal{S}_e(V')$
s.t. $E_1 \sim \rho_u^L$
E_1 has $(\hat{B})$ on $\mathcal{S}(V')$.
従って特に, $a_{E_1} = \rho^L(u)$.

<u>Theorem</u> (2.9) [L.-S.; 3.5]

v is induced by u とする.

ρ_u^L has $(\hat{B})$ on $H^*(L/L\cap B)$ の $\varepsilon_{W'}$ ならば,

$E = j_{W'}^{W}(E_1) \sim \rho_v^G$ as W-modules.

従って, $a_E = a_{E_1} = \beta^L(u) = \beta^G(v)$ (Prop (2.6)(i))

E has $(\hat{B})$ on $R(V)$ (Prop (2.6)(ii))

より, ρ_v^G has $(\hat{B})$ on $H^*(G/B)$ の ε_W.

Conjecture (B) (Lusztig, Shoji)

すべての unipotent elt $v\in G$ に対して,

ρ_v^G has $(\hat{B})$ on $H^*(G/B)$ の ε_W か?

§3. 補足

具体的な計算の仕方は著者の修論を見て下さい.

最後になりましたが, 著者に発表の機会を与えて下さった岩堀先生, 及びに法外な時間超過にもかかわらず聞いて下さった御出席の方々に感謝します.

$W(E_6)$ の Springer 表現

0	$1_p'$
A_1	$6_p'$ *)
$2A_1$	$20_p'$
$3A_1$	$15_q'$ *)
A_2	$30_p'$
A_2+A_1	$64_p'$
A_2+2A_1	$60_p'$ *)
$2A_2$	$24_p'$
$2A_2+A_1$	10_s *)
A_3	$81_p'$
A_3+A_1	60_s
$D_4(a_1)$	80_s
A_4	81_p
A_4+A_1	60_p
D_4	24_p
$D_5(a_1)$	64_p
A_5	15_q
A_5+A_1	30_p
D_5	20_p
$E_6(a_1)$	6_p
E_6	1_p

Rem *) は確定していない.

References:

[Hatta - Springer] "A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups" Inv. math., 41 (1977), 113 - 127

[Lusztig - Spaltenstein] "Induced unipotent classes" J. London Math. Soc. (2), 19 (1979), 41 - 52

[Murakami] "E_6型 Weyl group の Springer 表現" 千葉大修士論文